Автоматика и телемеханика, № 6, 2025

© 2025 г. **В.Е. ХАРТОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (hartovskij@grsu.by)**
(Гродненский государственный университет им. Я. Купалы),
А.В. МЕТЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (ametelskii@gmail.com)
(Минск),
В.В. КАРПУК, канд. физ.-мат. наук (vasvaskarpuk@gmail.com)
(Белорусский национальный технический университет, Минск)

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО НЕПОЛНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа с сосредоточенными запаздываниями получены критерии существования регуляторов с обратной связью по измерениям наблюдаемого выхода, обеспечивающих заданный спектр или экспоненциальную стабилизацию. Доказаны критерии существования наблюдателей, формирующих асимптотические оценки и имеющих ошибки, описываемые линейными однородными системами с наперед заданным характеристическим квазиполиномом или обладающими свойством экспоненциальной устойчивости. Все рассуждения работы являются конструктивными и содержат метод построения соответствующего регулятора или наблюдателя.

Ключевые слова: дифференциально-разностная система, нейтральный тип, запаздывание, экспоненциальная стабилизация, модальная управляемость, регулятор, наблюдатель.

DOI: 10.31857/S0005231025060026, **EDN:** IJXPQL

1. Введение

Эффект запаздывания присущ практически всем процессам управления. Поэтому его необходимо учитывать при построении целого ряда технических, экономических и других моделей [1–4]. Исследованию общей теории систем с запаздыванием, а также использованию таких систем в прикладных областях посвящено достаточно много работ (см. например, введение в [3, 4]). В настоящей статье изучается проблема стабилизации для систем с запаздыванием нейтрального типа. Такие системы описывают поведение объектов и процессов, скорость эволюции которых зависит как от их предшествующих состояний, так и от их скоростей, например [2] движения маятника с вязким наполнителем, модель врезного шлифования, объекты, динамика которых

[1] Работа выполнена в рамках гранта Президента Республики Беларусь (распоряжение № 15рп от 27 января 2025 г.)

описывается системами с распределенными запаздываниями (в частности телеграфными уравнениями). Приведем еще конкретные примеры задач стабилизации для линейных систем нейтрального типа. При исследовании колебаний токоприемника движущегося локомотива вдали от опоры (она находится сзади токоприемника) необходимо учитывать эффект воздействия отраженных волн контактного провода от струн, поддерживающих этот провод, и от опоры, находящейся перед движущимся токоприемником. В этом случае возникает проблема стабилизации такой механической системы [5]. Другой пример [6, с. 235] – задача стабилизации системы, возникающей в случае поступательного и прямолинейного движения некоторой массы под действием линейной восстанавливающей силы, пропорциональной координате, и некоторой неконсервативной силы. Учитывая, что для срабатывания чувствительных элементов системы, регистрирующих перемещение, скорость и ускорение массы, а также реле и сервомотора нужно некоторое время, получается [6, с. 235] модель в виде линейной автономной системы нейтрального типа.

Исследование задачи стабилизации систем с запаздыванием было инициировано в [7, 8], а затем подхвачено многими исследователями [9–16] (см. также библиографию в этих работах). Однако, невзирая на достаточно большой поток публикаций в этом направлении, проблема стабилизации на сегодняшний день до конца не изучена.

Спектр линейных систем с последействием в общем случае бесконечен, поэтому анализ и последующее исключение неустойчивых собственных значений из спектра требует определенных вычислительных усилий [15]. В связи с этим более универсальным подходом для стабилизации системы является решение задачи назначения конечного спектра, как правило состоящего из чисел с отрицательными действительными частями [17–19]. К существенному недостатку использования такого подхода для стабилизации системы следует отнести условия разрешимости соответствующей задачи, которые являются более жесткими по сравнении с условиями стабилизации.

Более общей по сравнению с задачей назначения конечного спектра является проблема модальной управляемости, заключающаяся в управлении коэффициентами характеристического квазиполинома системы [20–22].

Эффективными методами анализа устойчивости систем с запаздыванием являются методы Ляпунова–Красовского и Ляпунова–Разумихина, позволяющие сформулировать условия разрешимости задачи управления в терминах матричных неравенств [23] (см. главы 3–7). Такой подход к анализу и проектированию регулятора дает возможность получить конструктивные конечномерные условия его существования и допускает распространение на другие задачи. Например, в [24] построено управление, ограничивающее влияние возмущений и шумов измерений, а условия устойчивости входных данных описываются в терминах матричных неравенств.

В отличие от описанного выше метода, основанного в большей степени на дифференциальных свойствах системы управления, предлагаемый в статье подход носит сугубо алгебраический характер. Полином $\det W(p,\lambda)$, где $W(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица замкнутой системы (в случае динамического регулятора), рассматривается как элемент идеала $\mathfrak{I}$, порожденного системой полиномов – алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы $W(p,\lambda)$. Поэтому класс возможных характеристических квазиполиномов $\det W(p,e^{-ph})$ может быть описан через вычисление базиса Грёбнера идеала $\mathfrak{I}$. Это обстоятельство сводит все вычисления, связанные с построением регулятора (или наблюдателя), к операциям в кольце полиномов. С использованием этой идеи в [19, 25, 26] решена задача построения регулятора с обратной связью, обеспечивающего равенство нулю через ограниченное время всех компонент исходной разомкнутой системы, т.е. обеспечивающего финитную стабилизацию [27] (другими словами, решение задачи полного успокоения регулятором с обратной связью). Решение такой задачи достигается за счет построения обратной связи так, чтобы замкнутая система стала системой с конечным спектром, точечно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам вектора-решения исходной системы [19, 25]. Развитие этих идей на системы нейтрального типа получено в [26], а их систематизация – в монографии [4]. Следующим шагом в исследовании задачи финитной стабилизации стало создание регуляторов с обратной связью по измерениям, представляющим собой сигнал наблюдаемого выхода. Для систем запаздывающего типа со скалярными входом и выходом такая задача изучена в [27], а для многовходных систем нейтрального типа – в [28, 29].

В настоящем исследовании на базе разработанных в [15] методов управления спектром систем нейтрального типа, а также структурных схем обратной связи по неполным измерениям, полученных в [28, 29], доказываются критерии существования регуляторов с обратной связью по измерениям наблюдаемого выхода, обеспечивающих решение задач модальной управляемости и стабилизации. Попутно в статье предложены методы построения двух типов асимптотических наблюдателей и найдены критерии их существования.

2. Основные обозначения

Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$(1)\quad \dot{x}(t)=A_0x(t)+\sum_{j=1}^{m}\big(A_jx(t-jh)+D_j\dot{x}(t-jh)\big)+\sum_{j=0}^{m}b_ju(t-jh),\quad t>0,$$

$$(2)\qquad y(t)=\sum_{j=0}^{m}c_j'x(t-jh),\quad t\geqslant 0,$$

$$(3)\qquad x(t)=\eta(t),\quad t\in[-mh,0].$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^n$ –вектор-столбец решения системы (1) ($n\geqslant 2$); $0<h$ – постоянное запаздывание; $A_0,A_j,D_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b_j\in\mathbb{R}^n$, $c_j'\in\mathbb{R}^n$ (символ «$'$» (штрих) обозначает операцию транспонирования); u – скалярное кусочно-непрерывное

управление, y – скалярный наблюдаемый выходной сигнал (выход). Начальная функция η предполагается непрерывной функцией, имеющей кусочно-непрерывную производную. В этом случае существует единственное непрерывное решение, имеющее кусочно-непрерывную производную. Далее всюду в статье предполагается, что начальная функция η неизвестна.

Цель исследования: на базе обратной связи, представляющей собой измерения выхода (2), построить регуляторы, обеспечивающие замкнутой системе заданный характеристический квазиполином или ее экспоненциальную стабилизацию. Исследование имеет следующую структуру. Вначале (см. раздел 3), на основе методов построения регуляторов, полученных в [15], будут построены два типа асимптотических наблюдателей. Далее в разделе 4 для получения регуляторов с обратной связью, формируемой на основании измерений наблюдаемого выхода, в конструкции регуляторов статьи [15] будут добавлены дополнительные контуры в виде полученных асимптотических наблюдателей по принципу, разработанному в [28, 29]. В завершающем разделе 5 будет приведен иллюстративный пример.

Пусть $p,\ \lambda \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел). Обозначим:

$$A(p,\lambda) = A_0 + \sum_{j=1}^{m} (A_j + pD_j)\lambda^j, \tag{4}$$

$W(p, e^{-ph}) = pI_n - A(p, e^{-ph})$ – характеристическая матрица ($I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – единичная матрица), $w(p, e^{-ph}) = |W(p, e^{-ph})|$ – характеристический квазиполином однородной ($u = 0$) системы (1). Здесь и далее $|W|$ – определитель произвольной квадратной матрицы W.

Пусть $\phi \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Квазиполином $d(p, e^{-ph})$, где

$$d(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{\phi} \theta_i(\lambda)p^i,$$

$\theta_i(\lambda)$ – некоторые полиномы, причем $\theta_\phi(0) = 1$, будем называть квазиполиномом нейтрального типа. Если $\theta_\phi(\lambda) = 1$, то, как частный случай, имеем квазиполином $d(p, e^{-ph})$ запаздывающего типа. Характеристический квазиполином $w(p, e^{-ph})$ однородной системы (1) является в общем случае квазиполиномом нейтрального типа и $\deg_p w(p,\lambda) = n$.

Пусть $\mathbb{R}^{r\times m}[\lambda]$, $\mathbb{C}^{r\times m}[\lambda]$ – множество матриц размера $r \times m$, элементы которых суть полиномы переменной λ с действительными и комплексными коэффициентами соответственно (если $r = m = 1$, то верхний индекс не пишем), λ_h – оператор сдвига, $p_{_D}$ – оператор дифференцирования, т.е. $p_{_D}^i \lambda_h^j f(t) = f^{(i)}(t - jh)$ (f – функция, $i, j \geqslant 0$ – целые числа).

Для дальнейшего использования компактной записи уравнений регуляторов и наблюдателей введем множество $\mathfrak{Q}^{r\times m}$ $\left(\mathfrak{Q}^{1\times 1} = \mathfrak{Q}\right)$, состоящее из отображений $\mathcal{Q} : f \mapsto \mathcal{Q}[f]$, где $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – произвольная скалярная или m-векторная непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную (квадратные скобки используются для различия в написании отображений и функций). Каждое отображение $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}^{r\times m}$ задается следующими элементами: 1) $q_i(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times m}[\lambda]$, $i = 0, 1$; 2) $P = \{\alpha_k \pm \mathbf{i}\beta_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, \ k = \overline{1, n_1}\}$ – набор действительных и комплексно-сопряженных чисел ($\mathbf{i}$ – мнимая единица); 3) $\widehat{q}_{ki}(\lambda) \in \mathbb{C}^{r\times m}[\lambda]$, $k = \overline{1, n_1}$, $i = \overline{1, n_2}$, ($n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 0$ – целые числа) и действует по следующему правилу (ниже $p_k \in P$)

$$\tag{5} \begin{gathered} \mathcal{Q}[f(t)] = q_0(\lambda_h)f(t) + q_1(\lambda_h)\dot{f}(t-h) + \\ + \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2}\int_0^h \widehat{q}_{ki}(\lambda_h)f(t-s)e^{p_k s}\frac{s^i}{i!}\,ds, \quad t > 0. \end{gathered}$$

Матрицы $\widehat{q}_{ki}(\lambda)$ в выражении (5) и множество P обладают следующим свойством: после применения формулы Эйлера ($e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$) выражение (5) приводится к виду

$$\tag{6} \mathcal{Q}[f(t)] = q_0(\lambda_h)f(t) + q_1(\lambda_h)\dot{f}(t-h) + \sum_{j=0}^{\widehat{n}_1}\int_0^h r_j(s)f(t-jh-s)\,ds,$$

где $\widehat{n}_1 = \max_{k,i}\{\deg_\lambda \widehat{q}_{ki}(\lambda)\}$, $r_j(s) = \sum_{k=1}^{n_1} e^{\alpha_k s}(\cos(\beta_k s)\nu_{jk}(s) + \sin(\beta_k s)\mu_{jk}(s))$, $(\alpha_k + \mathbf{i}\beta_k) \in P$, $\nu_{jk}(s), \mu_{jk}(s) \in \mathbb{R}^{r\times m}[s]$ ($\deg_s \nu_{kj} \leqslant n_2$, $\deg_s \nu_{kj} \leqslant n_2$). Таким образом, все выражения в соотношении (6) представляют собой действительные величины.

При замыкании исходной системы регуляторами, содержащими слагаемые вида (5) (вида (6), что то же самое), в замкнутой системе могут появиться распределенные запаздывания, описываемые интегральными слагаемыми в (6). В этом случае членам с распределенным запаздыванием (см. выражение (5)) в характеристической матрице замкнутой системы будут соответствовать выражения $\widehat{q}_{ki}(e^{-ph})\int_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!\,ds$. Вычисляя интегралы из этих выражений и затем полагая $\lambda = e^{-ph}$, получаем целые дробно-рациональные функции [19]

$$\tag{7} \left.\int_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!ds\right|_{e^{-ph}=\lambda} = \frac{(-1)^{i+1}}{i!}\frac{d^i}{dp^i}\left(\frac{\lambda - e^{-p_k h}}{e^{-p_k h}(p-p_k)}\right), \quad i = 0, 1, \ldots$$

Соответственно выражению (5) (или (6)) в характеристической матрице замкнутой системы будет соответствовать матрица

$$\left.\mathcal{Q}[e^{pt}]e^{-pt}\right|_{e^{-ph}=\lambda} = Q(p, \lambda),$$

где

$$\tag{8} Q(p, \lambda) = q_0(\lambda) + p\lambda q_1(\lambda) + q(p, \lambda),$$

$q(p,\lambda)=\frac{q_1(p,\lambda)}{q_2(p)}$ – дробно-рациональная функция, правильная по переменной p ($q_1(p,\lambda)$, $q_2(p)$ – полиномы с комплексными коэффициентами, $\deg_p q_1(p,\lambda) < \deg_p q_2(p)$. Условимся, что в дальнейшем, если $\widehat{W}(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица системы нейтрального типа, содержащей распределенное запаздывание, определяемое выражением вида (6), то матрица $\widehat{W}(p,\lambda)$ получается так: сначала вычисляются интегралы вида (7), после чего в полученном выражении полагается $e^{-ph}=\lambda$.

Пусть задано отображение $\mathcal{Q}$, определяемое (5). Тогда под транспонированным отображением $\mathcal{Q}'$ понимаем отображение, которое получается из (5) при замене $q_0(\lambda)$, $q_1(\lambda)$, $\widehat{q}_{ki}(\lambda)$ на $q_0'(\lambda)$, $q_1'(\lambda)$, $\widehat{q}'_{ki}(\lambda)$ соответственно.

3. Асимптотическая оценка решения

В данном разделе построим наблюдатели, позволяющие по измерениям (2) формировать асимптотические оценки решения исходной системы (1) с ошибками, стремящимися к нулю с заданной или экспоненциальной скоростью, которая определяется корнями характеристического квазиполинома. Далее эти результаты понадобятся для построения стабилизирующего регулятора с обратной связью, формируемой по результатам наблюдений выходного сигнала.

Определим следующую линейную систему нейтрального типа:

$$\begin{aligned}\dot z_1(t)&=A(p_{{}_D},\lambda_h)z_1(t)+\mathcal{L}_1[z_2(t)]+b(\lambda_h)u(t),\\ \dot z_2(t)&=\beta_0(p_{{}_D})c'(\lambda_h)z_1(t)+\mathcal{L}_2[z_2(t)]-\beta_0(p_{{}_D})y(t),\quad t>0,\end{aligned}\tag{9}$$

где матрица $A(p,\lambda)$ определяется формулой (4), $\mathcal{L}_1\in\mathfrak{Q}^{n\times 1}$, $\mathcal{L}_2\in\mathfrak{Q}^{1\times 1}$, $\beta_0(p)\in\mathbb{R}_0[p]$, $\mathbb{R}_0[p]=\big\{1,\,p+\widehat{\alpha}\,:\,\widehat{\alpha}\in\mathbb{R}\big\}$ – множество полиномов, имеющих вид $p+\widehat{\alpha}$ или равных единице. Для системы (9) берем любое начальное состояние вида

$$z(t)=\varphi(t),\quad t\in[-h_0,0],\tag{10}$$

где φ – непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную, h_0 – длина отрезка последействия системы (9).

Компоненту z_1 вектора-решения $z=\operatorname{col}[z_1,z_2]$ системы (9) берем в качестве оценки решения x системы (1), (2) (при заданном управлении u). Обозначим: $\zeta=z_1-x$ – ошибка оценки z_1 решения x. Легко видеть, что функция ζ есть компонента решения однородной системы

$$\begin{aligned}\dot\zeta(t)&=A(p_{{}_D},\lambda_h)\zeta(t)+\mathcal{L}_1[z_2(t)],\\ \dot z_2(t)&=\beta_0(p_{{}_D})c'(\lambda_h)\zeta(t)+\mathcal{L}_2[z_2(t)],\quad t>0.\end{aligned}\tag{11}$$

Рассмотрим характеристическую матрицу $W_z(p,\lambda)$ системы (11) (однородной ($u=0$) системы (9))

$$W_z(p,\lambda)=\begin{bmatrix}pI_n-A(p,\lambda) & -L_1(p,\lambda)\\ -\beta_0(p)c'(\lambda) & p-L_2(p,\lambda)\end{bmatrix},\tag{12}$$

где $L_i(p,\lambda) = \mathcal{L}_i[e^{pt}]e^{-pt}$. Введем в рассмотрение полином

$$g(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} p^i g_i(\lambda), \quad g_i(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda], \quad g_{n+1}(0) = 1. \tag{13}$$

Очевидно, что квазиполином $d(p, e^{-ph})$ в общем случае может быть квазиполиномом нейтрального типа.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что для системы (1), (2) *существует наблюдатель* (9) *с заданным характеристическим квазиполиномом, если для любого полинома* (13) *найдутся такие* $\mathcal{L}_1 \in \mathfrak{Q}^{n\times 1}$, $\mathcal{L}_2 \in \mathfrak{Q}^{1\times 1}$, $\beta_0(p) \in \mathbb{R}_0[\lambda]$, *что выполняется равенство*

$$\left|W_z(p,\lambda)\right| = g(p,\lambda). \tag{14}$$

З а м е ч а н и е 1. Поскольку основная цель проектирования наблюдателей состоит в получении оценки решения исходной системы, то квазиполином (13) при конструировании наблюдателя с заданным характеристическим квазиполиномом следует выбирать так, чтобы система (11) была асимптотически или экспоненциально устойчивой. Наиболее удобным с точки зрения сложности вычислений при нахождении решения системы (9) будет выбор полинома (13), не зависящего от переменной λ, корни которого имеют отрицательные действительные части.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что для системы (1), (2) *существует экспоненциально устойчивый наблюдатель* (9), *если найдутся такие* $\mathcal{L}_1 \in \mathfrak{Q}^{n\times 1}$, $\mathcal{L}_2 \in \mathfrak{Q}^{1\times 1}$, $\beta_0(p) \in \mathbb{R}_0[p]$, *что система* (11) *является экспоненциально устойчивой.*

З а м е ч а н и е 2. Для экспоненциальной устойчивости линейной однородной автономной системы нейтрального типа необходимо и достаточно [14], чтобы ее характеристический квазиполином был экспоненциально устойчивым (корни p_i характеристического уравнения удовлетворяют неравенству $\mathbf{Re}\, p_i < \varepsilon\ \exists \varepsilon < 0$). В этом случае будет [14] экспоненциально устойчивым разностное уравнение, описывающее поведение скачков первых производных решения. Поясним сказанное на примере системы

$$\dot{x}(t) = \mathcal{Q}[x(t)], \tag{15}$$

где отображение $\mathcal{Q}$ определено в (6) (считаем, что все матрицы в (6) имеют размер $n\times n$). Пусть $W_0(p, e^{-ph})$ – характеристическая матрица системы (15), $W_0(p,\lambda) = p\big(I_n - \lambda q_1(\lambda)\big) - q_0(\lambda) - q(p,\lambda)$ (см. (8)). Введем множества

$$\Delta_0 = \left\{p \in \mathbb{C} \,:\, \left|W_0(p, e^{-ph})\right| = 0\right\}, \quad \Delta_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \left|I_n - \lambda q_1(\lambda)\right| = 0\right\}. \tag{16}$$

Для экспоненциальной устойчивости системы (15) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{Re}\, p < -\varepsilon \quad \exists \varepsilon > 0, \quad p \in \Delta_0. \tag{17}$$

В этом случае из экспоненциальной устойчивости разностного уравнения будет следовать, что

$$|\lambda| > 1, \quad \lambda \in \Delta_1. \tag{18}$$

Рассмотрим систему (1). Обозначим: $D(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \lambda^j D_j$. Сформулируем критерии существования наблюдателя с заданным характеристическим квазиполиномом.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы для системы* (1), (2) *существовал наблюдатель* (9) *с заданным характеристическим квазиполиномом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ c'(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ c'(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

Доказательство см. в Приложении.

Следующее утверждение является критерием существования экспоненциально устойчивого наблюдателя.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы для системы* (1), (2) *существовал экспоненциально устойчивый наблюдатель* (9), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\begin{gathered} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ c'(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{Re}\, p \geqslant \varepsilon_1, \quad \exists \varepsilon_1 < 0; \\ \operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ c'(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \leqslant 1. \end{gathered} \tag{20}$$

Доказательство см. в Приложении.

4. Модальная управляемость и экспоненциальная стабилизация

Определим динамический регулятор с обратной связью, в качестве которой используем результаты измерений наблюдаемого выходного сигнала

$$\begin{gathered} u(t) = \alpha_0(p_{\scriptscriptstyle D}) x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) = \mathcal{Q}_{11}[x_1(t)] + \mathcal{Q}_{12}[x_2(t)], \\ \dot{x}_2(t) = b(\lambda_h)\alpha_0(p_{\scriptscriptstyle D}) x_1(t) + A(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h) x_2(t) + \mathcal{Q}_{23}[x_3(t)], \\ \dot{x}_3(t) = \alpha_1(p_{\scriptscriptstyle D}) c'(\lambda_h) x_2(t) + \mathcal{Q}_{33}[x_3(t)] - \alpha_1(p_{\scriptscriptstyle D}) y(t), \quad t > 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $x_1,\ x_3 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ – вспомогательные переменные; $\mathcal{Q}_{11} \in \mathfrak{Q}$, $\mathcal{Q}_{12} \in \mathfrak{Q}^{1\times n}$, $\mathcal{Q}_{23} \in \mathfrak{Q}^{n\times 1}$, $\mathcal{Q}_{33} \in \mathfrak{Q}$; $\alpha_i(p) \in \mathbb{R}_0[p]$, $i = 0, 1$.

Замкнем систему (1), (2) регулятором (21). Легко видеть, что система (1), (2), (21) является линейной неоднородной автономной системой нейтрального типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями, неоднородная часть которой зависит от выхода $y(t)$. Заменив в неоднородной части функцию $y(t)$ согласно (2) на $c'(\lambda_h)x(t)$, получим однородную систему. Запишем характеристическую матрицу $\overline{W}(p,\lambda)$ этой однородной системы

$$(22)\quad \overline{W}(p,\lambda)=\begin{bmatrix} pI_n-A(p,\lambda) & -\alpha_0(p)b(\lambda) & 0_{n\times n} & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & p-Q_{11}(p,\lambda) & -Q_{12}(p,\lambda) & 0 \\ 0_{n\times n} & -\alpha_0(p)b(\lambda) & pI_n-A(p,\lambda) & -Q_{23}(p,\lambda) \\ \alpha_1(p)c'(\lambda) & 0 & -\alpha_1(p)c'(\lambda) & p-Q_{33}(p,\lambda)\end{bmatrix},$$

где $Q_{ij}(p,\lambda)=\mathcal{Q}_{ij}[e^{pt}]e^{-pt}$, $0_{i\times j}\in\mathbb{R}^{i\times j}$ $(i,\ j>1)$ – нулевая матрица.

Определение 3. Систему (1), (2) *назовем модально управляемой по выходу, если для любого полинома*

$$(23)\qquad \chi(p,\lambda)=\chi_1(p,\lambda)\chi_2(p,\lambda),$$

где $\chi_k(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{n+1}p^i\chi_{ki}(\lambda)$, $\chi_{ki}\in\mathbb{R}[\lambda]$, $k=1,2$, *причем* $\chi_{k\,n+1}(0)=1$, *существует регулятор вида* (21) *такой, что для характеристической матрицы замкнутой системы* (1), (2), (21) *выполняется равенство*

$$(24)\qquad \left|\overline{W}(p,\lambda)\right|=\chi(p,\lambda).$$

Заметим, что квазиполином $\chi(p,e^{-ph})$ в общем случае может иметь нейтральный тип.

Определение 4. Систему (1), (2) *назовем экспоненциально стабилизируемой по выходу, если существует регулятор вида* (21) *такой, что замкнутая система* (1), (2), (21) *является экспоненциально устойчивой.*

Следующие теоремы являются критериями модальной управляемости и экспоненциальной стабилизируемости системы (1), (2) в классе регуляторов (21).

Теорема 3. Система (1), (2) *модально управляема в классе регуляторов* (21) *тогда и только тогда, когда*

$$(25)\qquad \begin{gathered}\operatorname{rank}\bigl[W(p,e^{-ph}),b(e^{-ph})\bigr]=n\quad\forall p\in\mathbb{C},\\ \operatorname{rank}\bigl[I_n-D(\lambda),\,b(\lambda)\bigr]=n\quad\forall\lambda\in\mathbb{C},\end{gathered}$$

и выполняются условия (19).

Доказательство см. в Приложении.

Теорема 4. Система (1), (2) *экспоненциально стабилизируема в классе регуляторов* (21) *тогда и только тогда, когда*

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank}\big[W(p,e^{-ph}), b(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{Re}\, p \geqslant \varepsilon_0, \quad \exists \varepsilon_0 < 0;\\
&\operatorname{rank}\big[I_n - D(\lambda),\, b(\lambda)\big] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \leqslant 1,
\end{aligned} \tag{26}
$$

и выполняются условия (20).

Доказательство см. в Приложении.

5. Пример

Пусть система (1), (2) имеет второй порядок, задана следующими матрицами и запаздыванием:

$$
A(p,\lambda) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2}p\lambda & -3+\lambda \\ -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{5}{12}\lambda \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\lambda - \lambda^2 \end{bmatrix},
$$
$$
c(\lambda) = [0,\ -1], \quad h = \ln 2. \tag{27}
$$

Исходная система с матрицами (27) имеет бесконечный спектр, ее характеристический квазиполином ($\lambda = e^{-ph}$):

$$
w(p,\lambda) = \frac{1}{2}p^2(\lambda+2) + \frac{5}{24}p\lambda(\lambda+2) + \frac{\lambda}{3} - 1.
$$

Легко видеть, что квазиполином $w(p,e^{-ph})$ имеет положительный корень, поскольку ($w(0,1) = -\frac{2}{3} < 0$; $\lim_{p\to+\infty} w(p,e^{-ph}) = +\infty$). Таким образом, невозмущенная система не является экспоненциально устойчивой.

Легко видеть, что первое условие в соотношениях (25) нарушается при $p = -1$, а второе – при $\lambda = -1$. Это говорит о том, что условия (26) выполнено. Первое условие в (19) также выполнено, но нарушается второе условие при $\lambda = -2$. Значит, имеют место условия (20). Таким образом, результаты [28], предлагающие конструкцию регулятора по неполным измерениям, который обеспечивает полную стабилизацию (одновременно финитную и асимптотическую стабилизацию и назначения конечного спектра) или только финитную стабилизацию [29], в данном случае не применимы. Однако выполнены условия теоремы 4, поэтому можем построить регулятор по неполным измерениям, обеспечивающий экспоненциальную стабилизацию замкнутой системы. Забегая вперед, сразу же отметим, что множество корней характеристического квазиполинома полученной замкнутой системы будет содержать точки $p = -1$ и корни уравнения $e^{-ph} = \lambda$, где $\lambda = -2$, в которых нарушаются условия (19), (25).

Перейдем к построению регулятора (21).

1. Следуя [15], строим регулятор (П.5). После необходимых расчетов [15] получим

$$
\begin{aligned}
&u(t) = x_1(t),\\
&\dot{x}_1(t) = \left[\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\lambda_h\right]\dot{x}_1(t-h) + \left[-6 + \frac{65}{12}\lambda_h - \frac{29}{24}\lambda_h^2\right]x_1(t) + \\
&+ \int\limits_0^h (-12 + 6\lambda_h)x_1(t-s)e^s ds + \left[\frac{-5}{72}, \frac{5}{72}\right]\dot{x}(t-h) + \\
&+ \left[\frac{-223}{72} - 2\lambda_h, \ \frac{25}{3} + \frac{185}{288}\lambda_h\right]x(t) + \int\limits_0^h \left[1, -\frac{9}{2}\right] e^s x(t-s)ds.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Матрица (П.6) в данном случае имеет вид

$$
W_x(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p + \dfrac{p\lambda}{2} & 3-\lambda & 0 \\ \dfrac{1}{3} & p + \dfrac{5}{12}\lambda & (2-\lambda)\lambda \\ \nu_1(p,\lambda) & \nu_2(p,\lambda) & \nu_3(p,\lambda) \end{bmatrix},
\tag{29}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\nu_1(p,\lambda) &= \frac{5p\lambda}{72} - \frac{1-2\lambda}{p-1} + \frac{223}{72} + 2\lambda,\\
\nu_2(p,\lambda) &= -\frac{5p\lambda}{72} + \frac{9(1-2\lambda)}{2(p-1)} - \frac{25}{3} - \frac{185\lambda}{288},\\
\nu_3(p,\lambda) &= p - \frac{5p\lambda}{6} + \frac{p\lambda^2}{6} + 6\frac{(1-2\lambda)(2-\lambda)}{p-1} + 6 - \frac{65\lambda}{12} + \frac{29\lambda^2}{24}.
\end{aligned}
$$

Прямыми вычислениями получаем, что $\left|W_x(p,\lambda)\right| = \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \times$ $\times (p+1)(p+2)(p+3)$.

2. Строим экспоненциально устойчивый наблюдатель (9). Для этого, следуя доказательству теоремы 4, для системы (П.1) строим регулятор (П.2), обеспечивающий экспоненциальную устойчивость замкнутой системы (9), (П.2). После этого, согласно (П.3), получаем экспоненциально устойчивый наблюдатель (9), где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1[z_2] &= \begin{bmatrix} \dfrac{-79}{4}\lambda_h - \dfrac{31}{24}\lambda_h^2 - \dfrac{5}{24}\lambda_h^3 - 36 \\ \dfrac{25}{288}\lambda_h^3 - \dfrac{155}{144}\lambda_h^2 + \dfrac{8}{3}\lambda_h + 12 \end{bmatrix} z_2(t),\\
\mathcal{L}_2[z_2] &= \frac{-1}{2}\dot{z}_2(t-h) + \left(\frac{5}{24}\lambda_h^2 - \frac{31}{12}\lambda_h - 6\right) z_2(t).
\end{aligned}
$$

Характеристическая матрица (12) имеет вид

$$W_z(p,\lambda)=\begin{bmatrix}\dfrac{p(2+\lambda)}{2} & 3-\lambda & \dfrac{79}{4}\lambda+\dfrac{31}{24}\lambda^2+\dfrac{5}{24}\lambda^3+36\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{5\lambda}{12}+p & -\dfrac{25}{288}\lambda^3+\dfrac{155}{144}\lambda^2-\dfrac{8}{3}\lambda-12\\ 0 & 1 & p+\dfrac{1}{2}p\lambda-\dfrac{5}{24}\lambda^2+\dfrac{31}{12}\lambda+6\end{bmatrix} \tag{30}$$

и $\left|W_z(p,\lambda)\right|=\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)^2(p+3)(p+2)(p+1)$.

3. Используя параметры построенных регулятора и наблюдателя, строим регулятор (21):

$$\begin{aligned} u(t)&=x_1(t),\\ \dot{x}_1(t)&=\left[\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\lambda_h\right]\dot{x}_1(t-h)+\left[-6+\frac{65}{12}\lambda_h-\frac{29}{24}\lambda_h^2\right]x_1(t)+\\ &+\int\limits_0^h(-12+6\lambda_h)x_1(t-s)e^s ds+\left[\frac{-5}{72},\frac{5}{72}\right]\dot{x}_2(t-h)+\\ &+\left[\frac{-223}{72}-2\lambda_h,\ \frac{25}{3}+\frac{185}{288}\lambda_h\right]x_2(t)+\int\limits_0^h\left[1,-\frac{9}{2}\right]e^s x(t-s)ds,\\ \dot{x}_2(t)&=\begin{bmatrix}0\\2\lambda_h-2\lambda_h^2\end{bmatrix}x_1(t)+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\dot{x}_2(t-h)+\begin{bmatrix}0 & -3+\lambda_h\\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{12}\lambda_h\end{bmatrix}x_2(t)+\\ &+\begin{bmatrix}\frac{-79}{4}\lambda_h-\frac{31}{24}\lambda_h^2-\frac{5}{24}\lambda_h^3-36\\ \frac{25}{288}\lambda_h^3-\frac{155}{144}\lambda_h^2+\frac{8}{3}\lambda_h+12\end{bmatrix}x_3(t),\\ \dot{x}_3(t)&=\frac{-1}{2}\dot{x}_3(t-h)+\left(\frac{5}{24}\lambda_h^2-\frac{31}{12}\lambda_h-6\right)x_3(t)+\big([0,\ 1]x_2(t)-y(t)\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Матрица замкнутой системы (22) имеет вид

$$\overline{W}(p,\lambda)=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{p\,(2+\lambda)}{2} & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{5\lambda}{12}+p & (2-\lambda)\,\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \nu_3(p,\lambda) & \nu_1(p,\lambda) & \nu_2(p,\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{p\,(2+\lambda)}{2} & 3-\lambda & \dfrac{79}{4}\lambda+\dfrac{31}{24}\lambda^2+\dfrac{5}{24}\lambda^3+36\\ 0 & 0 & (2-\lambda)\,\lambda & \dfrac{1}{3} & \dfrac{5\lambda}{12}+p & -\dfrac{25}{288}\lambda^3+\dfrac{155}{144}\lambda^2-\dfrac{8}{3}\lambda-12\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & p+\dfrac{1}{2}p\lambda-\dfrac{5}{24}\lambda^2+\dfrac{31}{12}\lambda+6\end{bmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями находим

$$\left|\overline{W}(p,\lambda)\right| = \left(1-\frac{1}{2}\lambda\right)\left(1-\frac{1}{3}\lambda\right)\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)^3 (p+3)^2(p+2)^2(p+1)^2.$$

6. Заключение

Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа со скалярным управлением и наблюдаемым выходом получены критерии модальной управляемости и экспоненциальной стабилизируемости в классе регуляторов с обратной связью, которая является функцией наблюдаемого выхода. Свойство модальной управляемости предоставляет более широкие возможности при проектировании системы в сравнении со свойством стабилизации. В частности, можно за счет выбора коэффициентов характеристического квазиполинома задать «скорость сходимости к нулю» решения системы. Или можно обеспечить конечный спектр, что сделает систему более простой с точки зрения последующего управления. Однако требования на параметры системы, которые предъявляет критерий модальной управляемости, являются более жесткими в сравнении с условиями экспоненциальной стабилизируемости.

Разработаны два типа асимптотических наблюдателей: наблюдатель с заданным характеристическим квазиполиномом и экспоненциально устойчивый наблюдатель. Поведение ошибок оценивания наблюдателей описывается линейной однородной автономной системой нейтрального типа. Причем в случае первого типа наблюдателя можно до его проектирования задать желаемый характеристический квазиполином системы, описывающей ошибку, т.е. заранее задать скорость сходимости оценки, определяемой наблюдателем, к решению исходной системы. В случае второго типа наблюдателя система, описывающая ошибку оценки решения, получается экспоненциально устойчивой. При этом управлять коэффициентами характеристического уравнения в общем случае невозможно. Однако экспоненциальная устойчивость системы, описывающей ошибку оценивания, гарантирует сходимость оценки к решению с «экспоненциальной скоростью».

Методы построения регуляторов и наблюдателей, разработанные в представленном исследовании, основаны на стандартных операциях с полиномами и полиномиальными матрицами и легко реализуются в современных пакетах компьютерной алгебры.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

Введем систему нейтрального типа

(П.1) $$\dot{x}(t) = A'(p_D,\lambda_h)x(t) + c'(\lambda_h)u(t), \quad t>0.$$

Определим регулятор

$$u(t) = \beta_1(p_{_D})x_1(t), \quad \dot{x}_1(t) = \mathcal{K}_1[x(t)] + \mathcal{K}_2[x_1(t)], \quad t > 0, \tag{П.2}$$

где $x_1 \in \mathbb{R}$ – вспомогательная переменная, $\mathcal{K}_1 \in \mathfrak{Q}^{1\times n}$, $\mathcal{K}_2 \in \mathfrak{Q}$, $\beta_1(p) \in \mathbb{R}_0[p]$.

Для того чтобы для любого заданного квазиполинома (13) существовал регулятор (П.2) такой, что $\bigl|W_1(p,\lambda)\bigr| = g(p,\lambda)$, необходимо и достаточно [15] условий (19). Здесь $W_1(p, e^{-ph})$ – характеристическая матрица замкнутой системы (П.1), (П.2),

$$W_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pI_n - A'(p,\lambda) & -\beta_1(p)c'(\lambda) \\ -K_1(p,\lambda) & p - K_2(p,\lambda) \end{bmatrix},$$

где $K_i(p,\lambda) = \mathcal{K}_i[e^{pt}]e^{-pt}\Big|_{e^{-ph}}$. Положим в уравнениях (9)

$$\beta_0(p) = \beta_1(p), \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{K}_1', \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{K}_2. \tag{П.3}$$

Тогда получим, что $\bigl(W_1(p,\lambda)\bigr)' = W_z(p,\lambda)$. Поэтому $\bigl|W_z(p,\lambda)\bigr| = g(p,\lambda)$. Отсюда следует существование наблюдателя (9) с заданным характеристическим квазиполиномом.

Доказательство теоремы 2.

Для того чтобы для системы (П.1) существовал регулятор (П.2) такой, что замкнутая система является экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно условий (20) [15]. Поэтому, повторив с необходимыми изменениями рассуждения доказательства теоремы 1, придем к существованию экспоненциально устойчивого наблюдателя (9). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.

Необходимость. Условия (25) являются [15] необходимыми и достаточными для модальной управляемости в классе регуляторов с обратной связью, формируемой на основании измерений вектора состояния x. Поэтому условия (25) необходимы для модальной управляемости в классе регуляторов с обратной связью по измерениям наблюдаемого выхода (2).

Докажем необходимость условий (19). Предположим, что система (1), (2) модально управляема в классе регуляторов (21). Считаем, что для некоторого заданного полинома (23) регулятор (21) обеспечивает равенство (24). Рассмотрим систему (П.1). Определим регулятор вида

$$\begin{gathered} u(t) = -\alpha_1(p_{_D})x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) = \mathcal{Q}_{33}'[x_1(t)] + \mathcal{Q}_{23}'[x_2(t)], \\ \dot{x}_2(t) = \alpha_1(p_{_D})c'(\lambda_h)x_1(t) + A'(p_{_D},\lambda_h)x_2(t) + \mathcal{Q}_{12}'[x_3(t)], \\ \dot{x}_3(t) = \alpha_0(p_{_D})b'(\lambda_h)\bigl(x(t) + x_2(t)\bigr) + \mathcal{Q}_{11}'[x_3(t)], \quad t > 0. \end{gathered} \tag{П.4}$$

Пусть $\widehat{W}(p, e^{-ph})$ – характеристическая матрица системы (П.1), (П.4). Легко видеть, что матрица $\Bigl(\overline{W}(p,\lambda)\Bigr)'$ получается из матрицы $\widehat{W}(p,\lambda)$ при перестановке в ней местами строк и столбцов блоков с номерами 2 и 4. Поэтому можем записать $E_{24}\widehat{W}(p,\lambda)E_{24}^{-1} = \left(\overline{W}(p,\lambda)\right)'$, где матрица E_{24} меняет местами строки блоков подходящего размера с номерами 2 и 4 при умножении на любую матрицу слева. Следовательно, $\left|\widehat{W}(p,\lambda)\right| = \chi(p,\lambda)$. Это значит, что система (П.1) является модально управляемой в смысле работы [15] (т.е. регулятором с обратной связью в виде функции состояния x), а условия (19) есть критерий модальной управляемости системы (П.1). Необходимость условий (19), (25) доказана.

Достаточность. Пусть задан полином (23). Доказательство достаточности представим в виде схемы построения регулятора (21), обеспечивающего равенство (24).

1. Определим регулятор с обратной связью по состоянию вида

$$u(t) = \alpha_0(p_{_D})x_1(t), \quad \dot{x}_1(t) = \mathcal{Q}_{12}[x(t)] + \mathcal{Q}_{11}[x_1(t)], \quad t > 0. \tag{П.5}$$

В регуляторе (П.5) обозначения те же, что и в (21). В силу условий (25) для любого полинома $\chi_1(p,\lambda)$ из (23) существует [9] регулятор (П.5) такой, что для характеристической матрицы $W_x(p,e^{-ph})$ замкнутой системы (1), (П.5),

$$W_x(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pI_n - A(p,\lambda) & -b(\lambda)\alpha_0(p) \\ -Q_{12}(p,\lambda) & p - Q_{11}(p,\lambda) \end{bmatrix}, \tag{П.6}$$

выполняется равенство

$$\left|W_x(p,\lambda)\right| = \chi_1(p,\lambda). \tag{П.7}$$

Далее считаем, что регулятор (П.5) построен.

2. Согласно теореме 1 из условия (19) следует, что для любого заданного полинома $\chi_2(p,\lambda)$ из (23) существует наблюдатель (9) с заданным характеристическим квазиполиномом такой, что для характеристической матрицы (12) имеет место соотношение

$$\left|W_z(p,\lambda)\right| = \chi_2(p,\lambda). \tag{П.8}$$

Далее считаем, что наблюдатель (9) построен.

3. Используя параметры регулятора (П.5) и наблюдателя (9), выписываем регулятор (21), дополнительно положив в (21)

$$\mathcal{Q}_{23} = \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{Q}_{33} = \mathcal{L}_2. \tag{П.9}$$

Покажем, что для характеристической матрицы $\overline{W}(p,e^{-ph})$ замкнутой системы (1), (2), (21) выполняется равенство (24). Для этого введем матрицу

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times 1} & 0_{n\times n} & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 1 & 0_{1\times n} & 0 \\ -I_n & 0_{n\times 1} & I_n & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 0 & 0_{1\times n} & 1 \end{bmatrix}. \tag{П.10}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\Gamma\overline{W}(p,\lambda)\Gamma^{-1}=\widetilde{W}(p,\lambda), \tag{П.11}$$

$$\widetilde{W}(p,\lambda)=\begin{bmatrix} pI_n-A(p,\lambda) & -b(\lambda)\alpha_0(p) & 0_{n\times n} & 0_{n\times 1}\\ -Q_{12}(p,\lambda) & p-Q_{11}(p,\lambda) & -Q_{12}(p,\lambda) & 0_{1\times 1}\\ 0_{n\times 1} & 0 & pI_n-A(p,\lambda) & -Q_{23}(p,\lambda)\\ 0_{n\times 1} & 0 & -\alpha_1(p)c'(\lambda) & p-Q_{33}(p,\lambda)\end{bmatrix}.$$

Из равенств (П.6), (П.7), (П.8), (П.11) и (12) следует, что $\overline{W}(p,\lambda)=$ $=\Gamma\overline{W}(p,\lambda)\Gamma^{-1}=\chi(p,\lambda)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.

Идея доказательства теорем 4 достаточно сильно похожа на идею доказательства теоремы 3, поэтому ограничимся краткой схемой доказательства.

Необходимость. 1. Предположим, что система (1), (2), замкнутая регулятором (21), является экспоненциально устойчивой. Сформируем множества Δ_0, Δ_1 из замечания 2 (см. (16)). Если нарушается первое условие в формулах (26), то для любого $\varepsilon_0<0$ найдется $p_0\in\mathbb{C}$, $\mathbf{Re}\,p_0\geqslant\varepsilon_0$ такое, что $\operatorname{rank}\big[W(p_0,e^{-p_0h}),b(e^{-p_oh})\big]<n$. В этом случае при любом регуляторе вида (21) число p_0 останется в спектре замкнутой системы (1), (2), (21), т.е. $p_0\in\Delta_0$. Поэтому (17) не будет выполняться. Следовательно, система (1), (2), (21) не может быть экспоненциально устойчивой.

Если нарушается второе условие в соотношениях (26), то найдется $\lambda_0\in\mathbb{C}$, $|\lambda_0|\leqslant 1$, такое, что $\operatorname{rank}\big[D(\lambda_0)\big]<n$. Очевидно, что при любом регуляторе вида (21) для замкнутой системы (1), (2), (21) справедливо $\lambda_0\in\Delta_1$, а значит, будет нарушаться условие (18). Необходимость условий (26) доказана.

2. Докажем необходимость условий (20). Рассмотрим систему (П.1), замкнутую регулятором (П.4). По очереди предполагая, что нарушаются первое или второе условия в (20), аналогично п. 1) показываем, что замкнутая система (П.1), (П.4) не может быть экспоненциально устойчивой.

Достаточность. Приведем схему построения регулятора (21), а затем обоснуем экспоненциальную устойчивость замкнутой системы.

1. Строим [9] регулятор (П.5), обеспечивающий экспоненциальную устойчивость замкнутой системы (1), (П.5). Возможность построения такого регулятора обеспечивают условия (26). При этом характеристическая матрица замкнутой системы (1), (П.5) будет иметь вид (П.6).

2. Строим экспоненциально устойчивый наблюдатель (9). Возможность построения такого регулятора обеспечивают условия (20). При этом характеристическая матрица однородной системы (9) будет иметь вид (12).

3. Используя параметры построенных регулятора (П.5) и наблюдателя (9), выписываем регулятор (21), при этом следует дополнительно определить матрицы согласно (П.9).

Покажем, что система (1), (21) является экспоненциально устойчивой. Для этого сделаем невырожденное преобразование переменных

$$\mathrm{col}[x, x_1, x_2, x_3] = \Gamma^{-1}\mathrm{col}[\tilde{x}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3],$$

где матрица Γ определена формулой (П.10). Получим новую систему с характеристической матрицей $\widetilde{\widetilde{W}}(p, e^{-ph})$, где матрица $\widetilde{\widetilde{W}}(p, \lambda)$ определена в формулах (П.11). Полученную систему назовем $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}$.

Из вида матрицы $\widetilde{\widetilde{W}}(p, \lambda)$ следует, что компоненты $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ определяются отдельной системой (являющейся подсистемой системы $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}$), характеристическая матрица которой совпадает с характеристической матрицей (12). Поэтому система, определяющая компоненты $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$, является экспоненциально устойчивой. То есть найдутся положительные постоянные γ_1, γ_2 такие, что

$$\|\tilde{x}_i(t)\| \leqslant \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}, \quad t > 0, \quad i = 2, 3. \tag{П.12}$$

Рассмотрим систему, соответствующую первым двум строкам блоков матрицы $\widetilde{\widetilde{W}}(p, \lambda)$. Поскольку компоненты $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ определяются отдельно, в рассматриваемой системе их можно считать неоднородной частью. Тогда компоненты $\tilde{x}$, $\tilde{x}_1$ удовлетворяют неоднородной системе, для которой характеристическая матрица соответствующей однородной системы совпадает с матрицей (П.6). Значит, указанная однородная система является экспоненциально устойчивой. Поэтому и с учетом (П.12) найдутся положительные постоянные γ_3, γ_4 такие, что

$$\|\tilde{x}(t)\| \leqslant \gamma_3 e^{-\gamma_4 t}, \quad \|\tilde{x}_i(t)\| \leqslant \gamma_3 e^{-\gamma_4 t}, \quad t > 0, \quad i = \overline{1, 3}. \tag{П.13}$$

Отсюда следует экспоненциальная устойчивость системы $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}$, а значит, и системы (1), (21). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.* Математические модели динамических систем с запаздыванием. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012. 122 с. https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/45629/1/978-5-7996-0772-2_2012.pdf (дата обращения: 17.03.2025)
2. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Системы с последействием нейтрального типа // АиТ. 1984. №1. С. 5–35.
3. *Полосков И.Е.* Методы анализа систем с запаздыванием [Электронный ресурс]: монография: Пермский государственный национальный исследовательский университет. Электронные данные. Пермь. 2020. – 19 Мб; 900 с. Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/poloskov-metody-analiza-sistem.pdf
4. *Хартовский В.Е.* Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022. 500 с.

5. *Гребенщиков Б.К.* Асимптотические свойства и стабилизация одной системы нейтрального типа с постоянным запаздыванием // Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 81–96. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.108

6. *Булгаков Б.В.* Колебания. М.: Из-во технико-теоретической лит-ры. 1954. 891 с.

7. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.

8. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 606–618.

9. *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional-differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1976. V. 20. No. 2. P. 191–204. https://doi.org/10.1007/BF01767451

10. *Lu W.S., Lee E., Zak S.* On the stabilization of linear neutral delay-dfference systems // IEEE Transact. Autom. Control. 1986. V. 31. No. 1. P. 65–67. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104115

11. *Rabah R., Sklyar G.M., Barkhayev P.Y.* Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems // ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations. 2012. V. 18. No. 3. P. 656–692. https://doi.org/10.1051/cocv/2011166

12. *Долгий Ю.Ф., Сесекин А.Н.* Исследование регуляризации вырожденной задачи импульсной стабилизации системы с последействием // Тр. ин-та мат. и механики УрО РАН. 2024. Т. 30. № 1. С. 80–99. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-1-74-95

13. *Hu G.D., Hu R.* A frequency-domain method for stabilization of linear neutral delay systems // Syst. Control. Lett. November 2023. V. 181. Art. 105650. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2023.105650

14. *Hale J.K., Verduyn Lunel S.M.* Strong stabilization of neutral functional differential equations // IMA J. Math. Control Inf. 2002. V. 19. No. 1–2. P. 5–23. https://doi.org/10.1093/imamci/19.1_and_2.5

15. *Метельский А.В.* Управление спектром системы нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 1. С. 99–125. https://doi.org/10.31857/S0374064124010097

16. *Миняев С.И., Фурсов А.С.* Топологический подход к одновременной стабилизации объектов с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1453–1461. https://doi.org/10.1134/S0374064113110095

17. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. V. AC–31. No. 6. P. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336

18. *Wang Q.G., Lee T.H., Tan K.K.* Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems. Springer-Verlag, 1999. 129 p. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-531-8

19. *Метельский А.В.* Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436–1452. https://doi.org/10.1134/S0374064113110083

20. *Марченко В.М.* Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1003–1017. https://doi.org/10.1134/S0012266111070111

21. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521. https://doi.org/10.1134/S0374064116110078

22. *Хартовский В.Е.* Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов // АиТ. 2017. № 11. С. 3–19. https://doi.org/10.1134/S0005117917110017

23. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Birhauser. SystemsandControl: Foundations and Applications. 2014, 362 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09393-2

24. *Furtat I., Fridman E.* Delayed Disturbance Attenuation via Measurement Noise Estimation // IEEE Transaction on Automatic Control. 2021. V. 66. No. 11. P. 5546–5553. https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3054238

25. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 19–28. https://doi.org/10.1134/S1064230709060033

26. *Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И.* Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403. https://doi.org/10.1134/S0374064116030122

27. *Метельский А.В.* Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682. https://doi.org/10.1134/S0374064119120082

28. *Хартовский В.Е.* Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 5. С. 686–706. https://doi.org/10.31857/S0374064124050093

29. *Хартовский В.Е. Урбан О.И.* Финитная стабилизация по неполным измерениям систем нейтрального типа в классе регуляторов с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниям // АиТ. 2025. № 1. С. 3–26. https://doi.org/10.31857/S000523102501

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 28.01.2025

После доработки 24.03.2025

Принята к публикации 28.03.2025